

УДК 517

Штокало М. – ст.гр. ХК-11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Стельмашук Л.В.

Розглянемо однорідний теплоізований з боків стержень скінченної довжини l , що має постійну по довжині товщину, і настільки тонкий, що в довільний момент часу температуру тіла у всіх точках поперечного перерізу можна було б вважати однаковою.

Позначимо температуру стержня в перерізі x в момент часу t через $u(x, t)$. Тоді функція $u=u(x, t)$ дає закон розподілу температури в стержні.

Виділимо елемент стержня $[x, x+\Delta x]$ і складемо для нього рівняння теплового балансу, згідно якого швидкість зміни кількості тепла в даному об'ємі (зміна кількості тепла за одиницю часу), обумовлена теплоємністю матеріалу, рівна кількості тепла, яке поступило в цей об'єм за одиницю часу теплопровідності.

Швидкість зміни тепла у виділеному елементі стержня рівна

$$\int_x^{x+\Delta x} c\rho S \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx,$$

де c – теплоємність матеріалу стержня; ρ – густина; S – площа поперечного перерізу.

Застосовуючи до інтегралу теорему про середнє і враховуючи, що величини c , ρ і S постійні, одержимо

$$\int_x^{x+\Delta x} c\rho S \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = c\rho S \frac{\partial u(x + \Theta_1 \Delta x, t)}{\partial t} \Delta x, \text{ де } 0 < \Theta_1 < 1.$$

Так як стержень теплоізований з боків, то тепло може надходити тільки через перерізи, обмежуючі виділений елемент стержня. Відомо, що кількість тепла, яке протікає через переріз з абсцисою x за одиницю часу, дорівнює

$$-k \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} S,$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, а S – площа перерізу. Тому шукана кількість тепла рівна

$$-kS \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S - (-k \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} S) = kS \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = kS \frac{\partial^2 u(x + \Theta_2 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x,$$

де $0 < \Theta_2 < 1$.

Рівняння теплового балансу буде мати вигляд

$$c\rho S \frac{\partial u(x + \Theta_1 \Delta x, t)}{\partial t} \Delta x = kS \frac{\partial^2 u(x + \Theta_2 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x.$$

Звідки $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right)$. Це рівняння – рівнянням теплопровідності для однорідного стержня. Розглянуто різні випадки рівняння теплопровідності для різних стержнів, отримано їх розв'язки.

Література. Диференціальні рівняння: Підруч. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. — 2-е вид., переробл. й доповн. — К.: Либідь, 2003. — 599 с.